

PROTOTIPO I PARZIALE

1) Calcolare, se esiste, l'inversa della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Svolgiamo l'esercizio in ambo i metodi che conosciamo.

In primo luogo occorre vedere se esiste l'inversa della matrice assegnata, ovvero se risulta $\det A \neq 0$. Si ha:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - (1 + 8 + 0) = 2 - 9 = -7 \neq 0 \Rightarrow \text{det} A = -7 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}, \text{ inversa di } A$$

Primo metodo

Calcoliamo l'inversa di A sfruttando la formula:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T$$

ove A^* è la matrice dei complementi algebrici.

Risulta allora:

$$\begin{aligned} c_{11} &= + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4; & c_{12} &= - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2; & c_{13} &= + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \\ c_{21} &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(-2) = 2; & c_{22} &= + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1; & c_{23} &= - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \\ c_{31} &= + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; & c_{32} &= - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4; & c_{33} &= + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \end{aligned}$$

da cui segue:

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^t = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Pertanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T = \frac{1}{-7} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Secondo metodo

Calcoliamo l'inversa di A sfruttando il metodo della matrice identità.

Affianchiamo, a tale scopo, alla matrice data, di ordine 3×3 , la matrice identità dello stesso ordine:

$$[A | I_3] = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_A \middle| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} \right)$$

Effettuiamo ora le operazioni elementari sulle righe, o sulle colonne, di $[A | I_3]$ in modo tale da ottenere, alla fine, una matrice della forma $[I_3 | B]$, dove la matrice B sarà proprio l'inversa A^{-1} di A :

$$\begin{aligned} [A | I_3] &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow 2R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & | & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & | & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & | & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_3 \rightarrow 7R_3 + 4R_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & | & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & | & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow 7R_1 + R_3} \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 & | & 8 & -4 & -2 \\ 0 & -7 & 0 & | & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & | & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} R_1 \rightarrow \frac{1}{14}R_1 \\ R_2 \rightarrow -\frac{1}{7}R_2 \\ R_3 \rightarrow \frac{1}{7}R_3 \end{matrix}} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} \mid \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \right)$$

Dunque risulta:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Si può ora osservare che la matrice inversa ottenuta con il secondo metodo è esattamente la stessa di quella ottenuta precedentemente con il primo metodo.

2) Dati i seguenti vettori:

$$\underline{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \underline{v}_2 = (0, 1, 0), \quad \underline{v}_3 = (-1, 0, 1)$$

verificare se essi sono linearmente dipendenti o indipendenti.

Primo metodo

Sfruttiamo la definizione di lineare dipendenza o indipendenza di vettori.

Scriviamo una combinazione lineare dei tre vettori e la eguagliamo al vettore nullo, precisamente:

$$(*) \quad k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 + k_3 \underline{v}_3 = \underline{0}$$

dove i k_i ($i = 1, 2, 3$) sono degli scalari ovvero dei numeri reali.

Poniamo ora nella (*), al posto dei vettori, le terne assegnate:

$$k_1 (1, 1, 1) + k_2 (0, 1, 0) + k_3 (-1, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

Moltiplichiamo ciascuna componente del vettore per il corrispondente scalare:

$$(k_1, k_1, k_1) + (0, k_2, 0) + (-k_3, 0, k_3) = (0, 0, 0)$$

Sommiamo ora componente per componente:

$$(k_1 + 0 - k_3, k_1 + k_2 + 0, k_1 + 0 + k_3) = (0, 0, 0)$$

cioè:

$$(k_1 - k_3, k_1 + k_2, k_1 + k_3) = (0, 0, 0)$$

Affinché l'equazione sopra scritta sia soddisfatta, i due membri devono essere uguali, ovvero i due vettori (quello che figura al primo membro e quello che figura al secondo membro) devono avere uguali le componenti che si trovano nella medesima posizione, precisamente deve risultare:

$$\begin{cases} k_1 - k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_1 + k_3 = 0 \end{cases}$$

Resta quindi da risolvere il sistema sopra riportato, ovvero determinare i valori delle incognite k_i ($i = 1, 2, 3$), osservando che se sono tutti nulli allora i vettori assegnati sono linearmente indipendenti, mentre se ne esiste uno diverso da zero allora siamo nel caso della lineare dipendenza dei vettori.

Occorre sottolineare, in primo luogo, che si tratta di un sistema quadrato di tre equazioni in tre incognite.

Dalla prima equazione otteniamo:

$$k_1 = k_3$$

Sostituiamo tale valore, ad esempio, nella seconda equazione:

$$k_3 + k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = -k_3$$

Sostituiamo i valori fino ad ora trovati nella terza equazione:

$$k_3 + k_3 = 0 \Rightarrow 2k_3 = 0 \Rightarrow k_3 = 0$$

Abbiamo così ottenuto:

$$k_1 = 0$$

$$k_2 = 0$$

$$k_3 = 0$$

Dunque il sistema ammette solo la soluzione nulla, ovvero la terna:

$$(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$$

Poiché gli scalari, soluzione del nostro sistema, sono tutti nulli, ne segue che i tre vettori assegnati sono **linearmente indipendenti**.

Secondo metodo

Sfruttiamo la nozione di rango.

Consideriamo la matrice costituita dai quattro vettori riga assegnati:

$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determiniamo il rango di A , sapendo che due o più vettori sono linearmente indipendenti se il rango della matrice ad essi associata è massimo.

Risulta, pertanto:

$$0 < r(A) \leq 3$$

Applichiamo Kronecker e consideriamo il seguente minore di ordine 2 diverso da zero:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$$

Calcoliamo adesso l'unico minore orlato di M_1 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

Dunque, poiché tale minore è diverso da zero risulta $r(A) = 3$, cioè il rango di A è massimo. I vettori sono pertanto **linearmente indipendenti**.

3) Calcolare il determinante della seguente matrice del quarto ordine:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -5 \\ 5 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sviluppando il determinante, con la regola di Laplace, rispetto alla prima colonna, risulta:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} \overset{+}{-1} & -2 & 3 & -5 \\ \overset{-}{5} & -2 & 4 & 1 \\ \overset{+}{4} & -2 & 1 & 3 \\ \overset{-}{3} & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot c_{11} + 5 \cdot c_{21} + 4 \cdot c_{31} + 3 \cdot c_{41} = -c_{11} + 5c_{21} + 4c_{31} + 3c_{41} = \\ &= -(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

I precedenti determinanti di ordine tre, a loro volta, possono essere calcolati applicando nuovamente la *regola di Laplace*, sviluppando ciascuno di essi secondo, per esempio, gli elementi della prima riga.

Risulta quindi:

$$\begin{aligned} \det A &= - \left[-2(-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right] + \\ &\quad -5 \left[-2(-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 5(-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right] + \\ &\quad +4 \left[-2(-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 5(-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right] + \\ &\quad -3 \left[-2(-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3(-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 5(-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right] = \end{aligned}$$

$$= -[-2(-1) - 4(-13) - 5] - 5[-2(-1) - 3(-13) - 5(-5)] + 4[-2(7) - 3(-7) - 5(-14)] +$$

$$- 3[-2(11) - 3(-4) - 5(6)] = -49 - 330 + 308 + 120 = 49$$

Dunque **$\det A = 49$** .

Si può ora osservare che si sarebbe pervenuti allo stesso risultato qualora si fosse utilizzata la *regola di Sarrus* per il calcolo dei determinanti del terzo ordine.

Ridurre ora la matrice data attraverso le operazioni elementari sulle righe e sulle colonne di una matrice. Si ha:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -5 \\ 5 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & -2 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \rightarrow 2R_4 + 3R_1} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & -2 & 8 \\ 3 & 0 & 11 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 5R_2} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -17 & 18 \\ 3 & 0 & 11 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - 3R_2} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -17 & 18 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow 17R_4 + 2R_3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -17 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix}$$

Abbiamo così ottenuto una matrice ridotta, sempre del quarto ordine:

$$R = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -17 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix}$$

i cui elementi speciali (elementi non nulli di ogni riga al di sotto dei quali tutti gli altri elementi della matrice sono nulli) sono esattamente:

$$a_{12} = -2; \quad a_{21} = +1; \quad a_{33} = -17$$

4) Calcolare il rango della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Iniziamo con l'osservare che la matrice A è quadrata di ordine $m = n = 4$, per cui risulta:

$$0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\} = \min\{4, 4\} = 4$$

Poiché, inoltre, la matrice A non è la matrice nulla segue che $r(A) \neq 0$. Dunque:

$$0 < r(A) \leq 4$$

Primo metodo

Vediamo se $r(A) = 4$, cioè se esiste un minore del quarto ordine estraibile da A non nullo.

Osserviamo che l'unico minore di ordine quattro è proprio $\det A$, motivo per cui occorre calcolare tale determinante:

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (\text{sottraendo alla prima colonna la quarta colonna}) \\ &= \begin{vmatrix} \overset{+}{2} & -1 & 2 & 1 \\ \overset{-}{0} & \overset{+}{0} & \overset{-}{0} & \overset{+}{1} \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (\text{sviluppando secondo gli elementi della seconda riga}) \\ &= +1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0\end{aligned}$$

Quindi $r(A) \neq 4$. Vediamo se risulta $r(A) = 3$, cioè se esiste un minore di ordine tre estraibile da A diverso da zero. Poiché risulta:

$$A' = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Ne segue che è proprio **$r(A) = 3$** .

Secondo metodo

Utilizziamo il Teorema degli Orlati o di Kronecker, partendo da un minore del secondo ordine diverso da zero:

$$A' = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) \geq 2$$

Esaminiamo adesso gli *orlati* di A' , ovvero i minori del terzo ordine ottenuti propri da A' aggiungendo una riga ed una colonna della matrice A assegnata: se gli orlati sono tutti nulli allora è $r(A) = 2$; se ne esiste, invece, almeno uno non nullo è $r(A) \geq 3$. Poiché risulta:

$$A'' = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) \geq 3$$

ovvero esiste un minore del terzo ordine, orlato di A' diverso da zero, passiamo ad esaminare gli *orlati* di A'' . L'unico *orlato* è proprio il $\det A$, che, in virtù di quanto osservato nel *primo metodo*, risulta uguale a zero: l'unico minore del quarto ordine estraibile da A è nullo, cioè risulta **$r(A) = 3$** .

5) Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

eseguire, ove possibile, le seguenti operazioni:

- a) $A+B$
- b) $B+C$
- c) $B \times C$
- d) $B \times A$
- e) $C-B$
- f) $3 \times A$

Osserviamo, in primo luogo, che la matrice A ha ordine 3×3 , ovvero è quadrata di ordine 3, la matrice B ha ordine 2×3 e la matrice C ha ordine 2×3 . Ne segue, pertanto, che:

- a) $A+B$ è impossibile in quanto A e B non hanno lo stesso ordine
- b) $B+C$ è possibile poiché le matrici B e C sono entrambe di ordine 2×3 e risulta:

$$B+C = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+3 & -2-4 \\ 1+0 & -3-1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

- c) $B \times C$ non è possibile in quanto il numero delle colonne della prima matrice del prodotto, ovvero B , è 3 che è diverso dal numero delle righe della seconda matrice del prodotto, ovvero C , che è pari a 2.
- d) $B \times A$ è possibile in quanto il numero delle colonne di B è 3, numero questo che coincide con il numero delle righe di A . Risulta allora:

$$\begin{aligned} B \times A &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + (-3) \cdot (-2) + 0 \cdot 1 & 1 \cdot (-3) + (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1+4-6 & 4-4-2 & -3+2+0 \\ 1-6+0 & 4+6+0 & -3-3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -5 & 10 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- e) $C-B$ è possibile in quanto le matrici sono dello stesso ordine:

$$C-B = \begin{pmatrix} 2-1 & 3-2 & -4-(-2) \\ 0-1 & -1-(-3) & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- f) $3 \times A$ è possibile in quanto risulta sempre lecito moltiplicare una qualunque matrice, rettangolare o quadrata che essa sia, per un numero reale; bisogna, cioè, moltiplicare per il numero dato tutti gli elementi della data matrice. Risulta, pertanto:

$$3 \times A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -9 \\ 6 & -6 & 3 \\ 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$